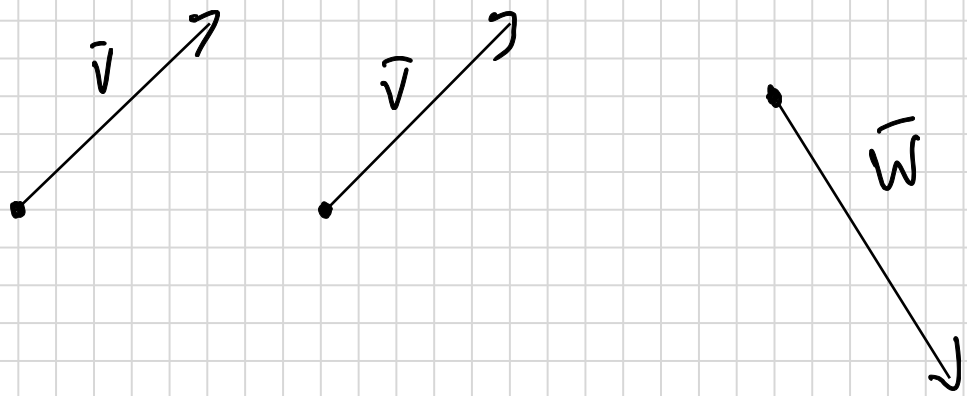
תנ"ן 2 מר

וקטורים

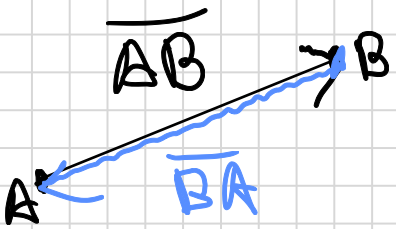
וקטור, מ מתינה ביזנומטרית, הוא אורך וכיוון. (מ- $\mathbb{R}^n$) גודל



$\bar{v}, \bar{w}, \bar{z}$

$\vec{v}$

- אסטר להגדיר וקטור עיי נקודת ההתחלה ונקודת הסיום



- נסמן אורך של וקטור עיי $\|\bar{v}\|$ ($\|\bar{v}\|_2$, $|\bar{v}|$)

הגדרות וסימונים:

- וקטור הנגדי הוא הוקטור היחיד שאורך 0. נסמנו $\bar{0}$. הוא הוקטור בתיאור שליו כיוון. אם A נקודה אז $\bar{0} = \overline{AA}$

A

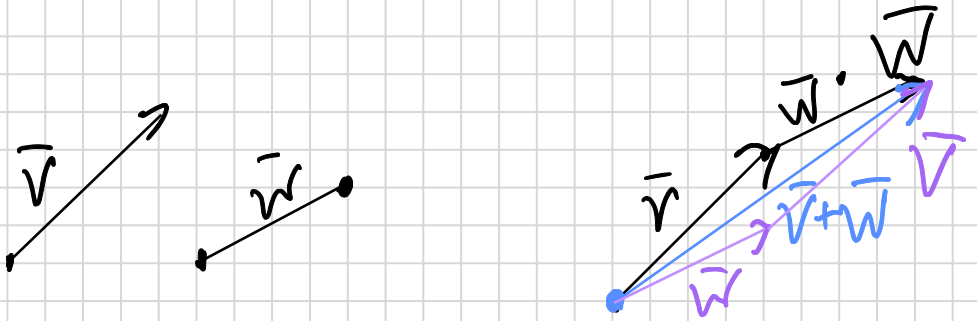
- אם $\bar{v}$ וקטור אז $-\bar{v}$ הוא

הווקטור יש אורך הכיוון הפוך (נגדי).

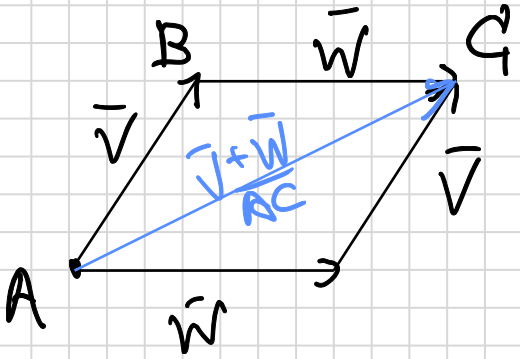
הערה: $\overline{BA} = -\overline{AB}$, $-\bar{0} = \bar{0}$

- חיבור וקטורים: נניח כי $\bar{v}, \bar{w}$ וקטורים.

הווקטור $\bar{v}+\bar{w}$ הוא הווקטור, $\underbrace{\bar{w}, \bar{v}}_{\text{מ-}\mathbb{R}\text{ יחיד}}$ עם שרשרת נצייר את $\bar{v}$, ואז נצייר את $\bar{w}$ כמתחיל מנקודת הסיום של $\bar{v}$, מתחיל מנקודת ההתחלה של $\bar{v}$ ומסתיים בנקודת הסיום של



$\bar{w}+\bar{v} = \bar{v}+\bar{w}$



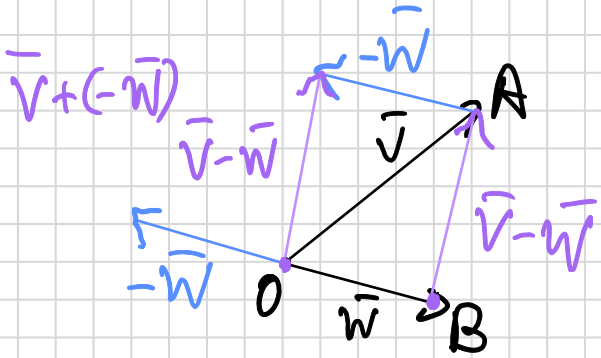
$\bar{v}+\bar{w}$

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$

- חיסור וקטורים: מהנתון וקטורים $\bar{v}, \bar{w}$ נגדיר

$\underbrace{\bar{v}-\bar{w}}_{\text{סימון}} = \bar{v}+(-\bar{w})$

אם מצייר את $\bar{v}, \bar{w}$ כמתחילים מאותו נקודה אז $\bar{v}-\bar{w}$ מתחיל מסוף של $\bar{w}$ ומסתיים בסוף של $\bar{v}$.

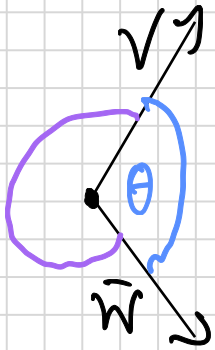


$$\bar{v}-\bar{w}$$

$$\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$$

$$\bar{v}-\bar{v}=\bar{0}$$

- זווית בין וקטורים: אם $\bar{v}, \bar{w}$ וקטורים שונים מאפס, נצייר אותם כמתחילים מאותה הנקודה, אז הזווית בין $\bar{v}, \bar{w}$ היא הזווית הקטנה מבין שתי הזוויות שנוצרות



$$\theta=\measuredangle(\bar{v},\bar{w})=\measuredangle(\bar{w},\bar{v})$$

$$0\le\theta\le\pi \quad (180^\circ)$$

$\theta=0$ אומר שלא $\bar{v}, \bar{w}$ אותו כיוון

$\theta=\pi/2$ אומר $\bar{v}, \bar{w}$ ניצבים, נסמן $\bar{w}\perp\bar{v}$

$\theta=\pi$ אומר כאונים הפוכים.

- נפח של סקלר מוכפל בוקטור: יהי $\bar{v}$ וקטור ויהי α מספר ממשי סקלר.

הווקטור $\alpha\cdot\bar{v}$ הוא הווקטור שאורכו

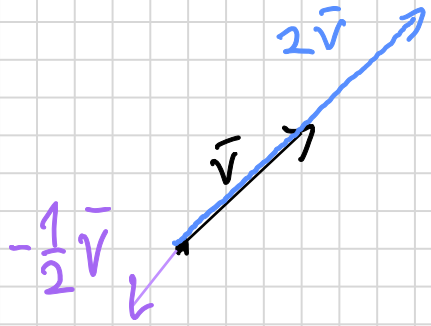
$$\underbrace{|\alpha|}_{\text{אורך מקדיל}}\cdot\underbrace{|\bar{v}|}_{\text{אורך וקטור}}.$$

אם $\bar{v}=\bar{0}$ או $\alpha=0$ אז מתקיים $\alpha\cdot\bar{v}=\bar{0}$.

נניח ש- $\bar{v}\neq\bar{0}$, $\alpha\neq 0$:

1. אם $\alpha>0$ אז הכיוון של $\alpha\cdot\bar{v}$ הוא הכיוון של $\bar{v}$. $\measuredangle(\bar{v},\alpha\bar{v})=0$

2. אם $\alpha<0$ אז הכיוון של $\alpha\cdot\bar{v}$ הוא הכיוון ההפוך ל- $\bar{v}$. $\measuredangle(\bar{v},\alpha\bar{v})=\pi$



הערה: $-\bar{v}=(-1)\cdot\bar{v}$

- אם $\bar{v}\neq 0$ אז

$$\left|\frac{1}{|\bar{v}|}\cdot\bar{v}\right|=\left|\frac{1}{|\bar{v}|}\right|\cdot|\bar{v}|=\frac{1}{|\bar{v}|}\cdot|\bar{v}|=1$$

נסמן $\hat{v}=\frac{1}{|\bar{v}|}\cdot\bar{v}$ ונקרא לוקטור מאורך 1 עם אותו הכיוון כמו $\bar{v}$.

$$\bar{v}=|\bar{v}|\cdot\frac{1}{|\bar{v}|}\cdot\bar{v}=\underbrace{|\bar{v}|}_{\text{אורך}}\cdot\underbrace{\hat{v}}_{\text{כיוון}}$$

- כמה תכונות:

1. $\bar{v}+\bar{w}=\bar{w}+\bar{v}$

2. $(\bar{v}+\bar{w})+\bar{z}=\bar{v}+(\bar{w}+\bar{z})$

3. $(\alpha+\beta)\cdot\bar{v}=\alpha\cdot\bar{v}+\beta\cdot\bar{v}$

4. $\alpha\cdot(\bar{v}+\bar{w})=\alpha\bar{v}+\alpha\bar{w}$

5. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\bar{v}=\alpha\cdot(\beta\cdot\bar{v})$

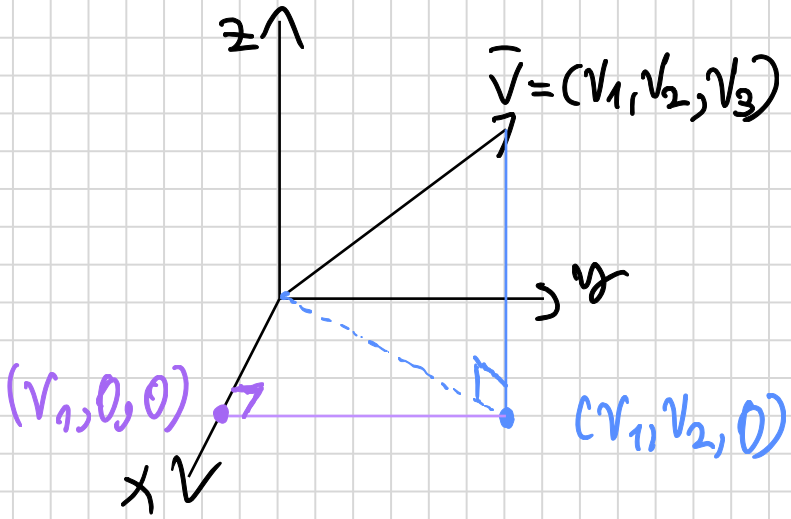
- נוסף כי $\bar{v},\bar{w}$ הם קולינאריים (קולינאריים) אם לפחות אחד מהם הוא הווקטור האפס, או שניהם שונים מאפס ומתלי זו כיוון אז מתלי כיוון הפוך. (מאונכים של ואלגברה לינארית: $\bar{v},\bar{w}$ תלויים לינארית).

קואורדינטות קרטזיות

הגדרה: נגדיר צמדים מ- $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}^3$ אם הם תקפים לכל מימד, כלומר מ- $\mathbb{R}^n$, n כללי.

- נקודה במרחב $\mathbb{R}^3$ היא (v_1,v_2,v_3).

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$



(v_1,v_2,v_3) הינו נקודה.

נתייחס ל- (v_1,v_2,v_3) גם כוקטור עם נקודת התחלה $(0,0,0)$ ונקודת סיום (v_1,v_2,v_3).

$$\bar{v}=(v_1,v_2,v_3)=\overline{\underbrace{(0,0,0)}_{A}\underbrace{(v_1,v_2,v_3)}_{B}}$$

- חיבור, חיסור, כפל בסקלר, כמו באלגברה לינארית

$$\alpha\cdot(v_1,v_2,v_3)+\beta(w_1,w_2,w_3)=$$
$$=(\alpha v_1+\beta w_1,\ \alpha v_2+\beta w_2,\ \alpha v_3+\beta w_3)$$

אורך: $|\bar{v}|=|(v_1,v_2,v_3)|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}=(v_1^2+v_2^2+v_3^2)^{1/2}$

$\|v\|_2$

המכפלה הסקלרית (מכפלה פנימית)

מהגדרתן $\bar{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\bar{w}=(w_1,w_2,w_3)$

המכפלה הסקלרית של $\bar{v},\bar{w}$ הינו

$$\bar{v}\cdot\bar{w}=v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3\in\mathbb{R}$$

$\bar{v}\cdot\bar{w}$ הינו סקלר.

תכונות: 1. $\bar{v}\cdot\bar{v} = |\bar{v}|^2 = v_1^2+v_2^2+v_3^2$

2. $\bar{v}\cdot\bar{w} = \bar{w}\cdot\bar{v}$

3. $\bar{v}\cdot(\bar{w}+\bar{z}) = \bar{v}\cdot\bar{w} + \bar{v}\cdot\bar{z}$

חילוף וקטורים חילוף סקלרים

4. $\alpha\cdot(\bar{v}\cdot\bar{w}) = (\alpha\cdot\bar{v})\cdot\bar{w} = \bar{v}\cdot(\alpha\cdot\bar{w})$

כפל סקלרים

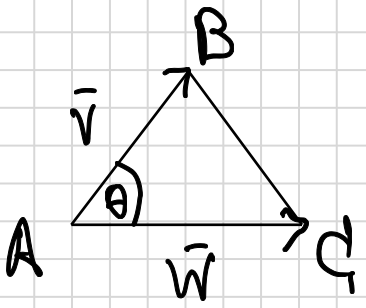
מכפלה סקלרית מן וקטורים

כפל סקלר בוקטור

5. $\bar{v}\cdot\bar{w} = |\bar{v}|\cdot|\bar{w}|\cdot\cos(\measuredangle(\bar{v},\bar{w}))$

עם התנאי שזה $\bar{v}=\bar{0}$ או $\bar{w}=0$ אז

צד ימין הוא אפס.



משפט הקוסינוסים

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB\cdot AC\cos\theta$$

$$\|$$

$$|\overline{BC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 - 2|\overline{AB}||\overline{AC}|\cos\theta$$

$\theta = \measuredangle(\bar{v},\bar{w})$

$$|\bar{v}-\bar{w}|^2 = |\bar{v}|^2 + |\bar{w}|^2 - 2|\bar{v}||\bar{w}|\cos\theta$$

$$|\bar{w}-\bar{v}|^2$$

$$\|$$

$$(\bar{v}-\bar{w})\cdot(\bar{v}-\bar{w}) = \bar{v}\cdot\bar{v} + \bar{w}\cdot\bar{w} - 2|\bar{v}||\bar{w}|\cos\theta$$

$$\underline{\bar{v}\cdot\bar{v}} - \bar{v}\cdot\bar{w} - \bar{w}\cdot\bar{v} + \underline{\bar{w}\cdot\bar{w}} = \underline{\bar{v}\cdot\bar{v}} + \underline{\bar{w}\cdot\bar{w}} - 2|\bar{v}||\bar{w}|\cos\theta$$

$$-2\,\bar{v}\cdot\bar{w} = -2|\bar{v}||\bar{w}|\cos\theta$$

$$\bar{v}\cdot\bar{w} = |\bar{v}||\bar{w}|\cos\theta$$

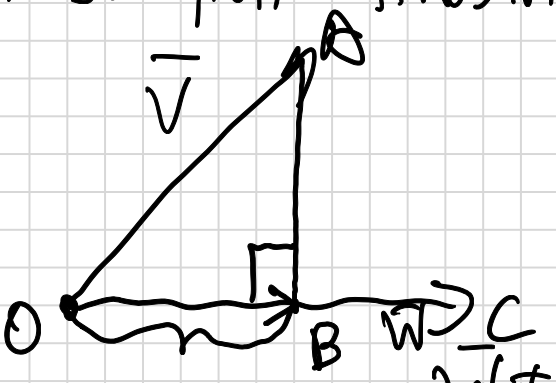
הוכחות: 1. $\bar{v}\cdot\bar{w}=0 \iff \measuredangle(\bar{v},\bar{w})=\frac{\pi}{2} \iff \bar{v}\perp\bar{w}$

2. $\bar{v}\cdot\bar{w}>0 \iff 0\le\measuredangle(\bar{v},\bar{w})<\frac{\pi}{2}$

3. $\bar{v}\cdot\bar{w}<0 \iff \frac{\pi}{2}<\measuredangle(\bar{v},\bar{w})\le\pi$

$\bar{v},\bar{w}\neq\bar{0}$

6. הזווית בין המכפלה הסקלרית והיטל.



$\bar{w}=\overline{OC}$

$\bar{v}=\overline{OA}$

$\bar{w}\neq\bar{0}$

$\overline{OB}=2$ סימן שזווית

שיאור המלא.